МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

- из вероватноће и статистике -

Дискретни Марковљеви ланци и примене

Ученик

Мина Спасојевић 4д

Ментор

Миодраг Радојевић

Београд, јун 2021.

Садржај

1

Увод

Интересантно је приметити да постоје процеси чија је прошлост и будућност независна, а притом само условљена садашњим стањем. Баш такви процеси се зову **Марковљеви процеси**, а једна врста оваквих процеса се називају **Марковљеви ланци**.

У овом раду ћемо се прво сусрести са проблемом Случајног хода, који заправо представља одличан уводни пример Марковљевог ланца за разумевање истог. Затим ћемо се упознати са самим појмом дискретних Марковљевих ланаца, где ћемо детаљније објаснити њихова својства, класификацију и матрични облик. Потом ћемо прећи на њихову примену у свакодневном свету, стављајући посебан акценат на *Google Page Rank*, алгоритам који рангира интернет странице по количини претраживања.

Веома занимљиво је видети како је заправо дошло до открића Марковљевих ланаца. Пре стотинак година руски математичар Андреј Андрејевич Марков основао је нову грану теорије вероватноће примењујући математику на поезију. Удубљујући се у текст романа „Евгеније Оњегин“ Александра Пушкина , Марков је сатима пролазио кроз обрасце самогласника и сугласника. Наиме, он је издвојио првих 20,000 слова романа и избацио је све знакове интерпункције и размаке између речи, чиме је добио непрекидан дугачак низ од 20,000 карактера. Затим је тај низ поделио у 200 блокова од по 10x10 карактера и за сваки од редова и колона у тим блоковима је бројао самогласнике. На основу тих пребројавања је могао по сваком од блокова да израчуна математичко очекивање и варијансу броја самогласника.
У другој фази свог истраживања, Марков се вратио на почетни низ од 20,000 слова не би ли израчунао број одговарајућих парова самогласника и број парова сугласника. Са свим тим калкулацијама могао је да процени у којој мери Пушкин одступа од принципа независности.
23. јануара 1913. године Марков је финализовао своја открића и послао их Царској академији наука у Санкт Петерсбургу. Његова анализа није променила разумевање или уважавање Пушкинове песме, али техника коју је развио - данас позната као Марковљев ланац - проширила је теорију вероватноће у новом смеру. Марковљева методологија је надмашила бацање новчића и коцкица (где је сваки догађај независан од свих осталих) и стигла је до ланаца повезаних догађаја (где будућност зависи од тренутног стања система).

Марковљеви ланци су данас свуда у науци. Методе које се не разликују превише од оних које је Марков користио у својој студији Пушкина помажу у идентификовању гена у ДНК и у алгоритмима за препознавање гласа и веб претрагу. У физици, Марковљеви ланци симулирају колективно понашање система који се састоји од многих честица које међусобно делују, као што су на пример електрони у чврстом телу. У статистици, ланци пружају методе за цртање репрезентативног узорка из великог скупа вероватноћа. И сами ланци су постали актуелно истраживачко подручје последњих деценија, настојећи да разумемо зашто неки од њих раде тако ефикасно, а неки не.

Како су ланци Маркова постали уобичајени алат, прича о њиховом пореклу углавном је избледела из сећања. Међутим, причу вреди испричати јер представља веома необичан спој математике и књижевности.

2

Случајан ход

Да бисмо се упознали са појмом Марковљевих ланаца најбоље је кренути од проблема дискретног стохастичког процеса Случајног хода, где је дозвољено кретање по целобројним координатама без ограничења.

Овде су нам од посебног значаја следећа два проблема:
1) Вероватноћа враћања у почетни положај у коначном времену
2) Математичко очекивање времена враћања у почетни положај

2.1 Неограничен случајан ход

Дефиниција 2.1.1. **Случајан ход** $(S_n)_{n\geq 0}$ је случајна величина задата на следећи начин: $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, $n \geq 1$, где је сваки од $(X_k)_{k\geq 1}$ случајна величина која узима вредности из скупа {-1, 0, 1}.

Претпоставићемо да су $(X_k)_{k\geq 1}$ независне и идентички дистрибуиране случајне величине са расподелом:

$$P(X_k = +1) = p$$
$$P(X_k = 0) = r$$
$$P(X_k = -1) = q \ ,$$

при чему је $p + q + r = 1$.

2.2 Математичко очекивање и варијанса

Дефиниција 2.2.1. **Случајан Бернулијев ход** $(S_n)_{n\geq 0}$ је слободан ход где је $P(X_k = 0) = r = 0$.

$E[X_n] = 1 \cdot p + (-1) \cdot q = p - q = 2p - 1$

$Var[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2 = 1 \cdot p + 1 \cdot q - (2p-1)^2 = 4p(1-p) = 4pq$

$E[S_n \mid S_0 = 0] = E[X_1 + ... + X_n] = n \cdot E[X_n] = n(p - q) = n(2p - 1)$

$Var[S_n \mid S_0 = 0] = E[S_n^2 \mid S_0 = 0] - (E[S_n \mid S_0 = 0])^2$

$Var[S_n \mid S_0 = 0] = E[(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2] - (E[(\sum_{k=1}^{n} X_k])^2$

$Var[S_n \mid S_0 = 0] = E[\sum_{k=1}^{n} X_k \sum_{l=1}^{n} X_l] - E[\sum_{k=1}^{n} X_k]E[\sum_{l=1}^{n} X_l]$

$Var[S_n \mid S_0 = 0] = E[\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} X_k X_l] - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} E[X_k]E[X_l]$

$Var[S_n \mid S_0 = 0] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] + \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} E[X_k X_l] - \sum_{k=1}^{n}(E[X_k])^2$

$- \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} E[X_k]E[X_l]$

$Var[S_n \mid S_0 = 0] = \sum_{k=1}^{n}(E[X_k]^2 - (E[X_k])^2) = \sum_{k=1}^{n} Var[X_k] = 4np(1-p)$

2.3 Расподела вероватноће

Приметимо да из почетног положаја 0, $(S_n)_{n \geq 0}$ може да постигне парно стање у паран број корака. Аналогно важи и обратно, односно $(S_n)_{n \geq 0}$ може постићи непарно стање у само непаран број корака. Заиста, ако кренемо из $S_n = k$ након два корака можемо да стигнемо само у стања $\{k-2, k, k+2\}$. Стога знамо да важи (имајући у виду да је $S_0 = 0$):

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 2k+1 \mid S_0 = 0) = 0, &\quad k \in Z, n \in N \\ P(S_{2n+1} = 2k \mid S_0 = 0) = 0, &\quad k \in Z, n \in N \\ P(S_n = k \mid S_0 = 0) = 0, &\quad |k| > n \end{aligned}$$

Посматрајмо кораке у временском интервалу од 0 до $2n$. Нека је l број корака нагоре, а $2n - l$ број корака надоле.
За случај када је $S_{2n} = 2k$ имамо да је $2k = l - (2n - l) = 2l - 2n$, те онда имамо $l = n + k$ корака нагоре и $2n - l = n - k$ корака надоле , при чему је $-n \leq k \leq n$.
Вероватноћа овакве путање је

$$p^{n+k} q^{n-k}.$$

Број путева који воде од почетног положаја 0 до стања $2k$ заправо представља број начина да се $n + k$ корака нагоре (или $n - k$ корака надоле) распореди по путањи дужине $2n$, где је дозвољено кретање само по целобројним координатама, и тај број је једнак

$$\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$$

Следи да је

$$P(S_{2n} = 2k \mid S_0 = 0) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}, \ -n \leq k \leq n,$$

односно да је (када k заменимо са $k-n$)

$$P(n+S_{2n}/2=k \mid S_0=0) = P(S_{2n}/2=k-n \mid S_0=0) = \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k}, 0 \leq k \leq 2n$$

Одакле закључујемо да је $n+S_{2n}/2$ биномна случајна величина са параметрима $(p, 2n)$.

Слично добијамо и за случај када је $S_{2n}=2k+1$ (овде је l број корака нагоре, а $2n+1-l$ број корака надоле). Тада је $2k+1=l-(2n+1-l)=2l-2n-1$, тј. број корака нагоре је једнак $l=k+n+1$, а број корака надоле је једнак $n-k$. На скоро идентичан начин као у претходном случају добијамо да важе следеће једнакости:

$$P(S_{2n+1}=2k+1 \mid S_0=0) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} q^{n-k},\ -n \leq k \leq n$$

$$P((2n+1+S_{2n+1})/2=k \mid S_0=0) = P((1+S_{2n+1})/2=k-n \mid S_0=0) = \binom{2n+1}{k} p^k q^{2n+1-k},$$
$$0 \leq k \leq 2n+1$$

2.4 Први долазак у стање $S_n = 0$

Нека $\mathrm{T}_0 = inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ представља време првог доласка у стање $S_n=0$. Лако уочавамо да је

$$P(T_0=1 \mid S_0=0)=0,$$
$$P(T_0=2 \mid S_0=0)=2pq,$$
$$P(T_0=4 \mid S_0=0)=2p^2q^2$$

Међутим, за рачунање $P(T_0=2n \mid S_0=0)$ за $n \geq 3$ мора да се израчуна вероватноћа одређених генераторних функција, што превазилази наш тренутни фокус рада, те ћемо сада само навести коначне резулатате математичког очекивања доласка у почетно стање $S_n=0$:

1) За несиметричан случај када је $p \neq q$ добијамо да је:

$$E[T_0 \mid S_0=k] = +\infty \text{ , ако је } q \leq p$$
$$E[T_0 \mid S_0=k] = \frac{k}{q-p} \text{ , ако је } q > p$$

односно да је:

$$E[T_0 \mid T_0 < \infty, S_0=0] = 2\frac{max(p,q)}{|p-q|}$$

2) За симетричан случај када је $p=q=\frac{1}{2}$ имамо да је:

$$E[T_0 \mid S_0=0] = +\infty$$

3

Дискретни Марковљеви ланци

У овом поглављу ћемо се фокусирати на дискретне Марковљеве ланце, истичући Марковљево својство, класификацију стања Марковљевих ланаца, улогу транзитивних матрица, вероватноће преласка вишег реда, стационарну расподелу, као и вероватноћу поготка.

3.1 Марковљево својство

Нека је Марковљев ланац низ случајних величина $X_0, X_1, X_2, ...$, које представљају неки одређен процес. Тада важе следеће дефиниције:

Дефиниција 3.1.1: Стање Марковљевог ланца у тренутку t представља вредност случајне величине X_t.
На пример, ако је $X_t = 6$, тада кажемо да је процес у стању 6 у тренутку t.

Дефиниција 3.1.2: Простор стања Марковљевог ланца је скуп свих могућих вредности које случајна величина X_t може да узме.

Дефиниција 3.1.3: Трајекторија Марковљевог ланца је један одређен скуп вредности које узимају случајне величине $X_0, X_1, X_2, ...$
На пример, ако је трајекторија задата као низ $s_0, s_1, s_2, ...$, то заправо значи да је $X_0 = s_0, X_1 = s_1, X_2 = s_2, ...$

Дефиниција 3.1.4. МАРКОВЉЕВО СВОЈСТВО: Нека је $(X_n)_{n \in N}$ дискретан стохастички процес који узима вредности из простора стања $S = Z$. За процес $(X_n)_{n \in N}$ се каже да је Марковљев, тј. да има Марковљево својство, ако за $\forall n \geq 1$ важи да расподела вероватноће случајне величине X_{n+1} зависи од стања X_n у тренутку n, али не и од стања X_k за $k \leq n-1$.

Другим речима, имамо да за $\forall n \geq 1$ и за $i_0, i_1, i_2, ..., i_n, j \in S$ важи следеће:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$$

Пример: Вратимо се сада на проблем Случајног хода кроз који смо пролазили у 2. поглављу. Случајан ход

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \ \ , \ \ n \in N$$

где је $(X_n)_{n\geq 1}$ низ независних помераја по целобројним координатама, заправо представља Марковљев ланац, при чему је $S = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Да бисмо ово проверили морамо да утврдимо да ли за процес $(S_n)_{n\in N}$ важи Марковљево својство. Заиста за свако $j, i_1, i_2, ..., i_n \in Z$ (где је $S_0 = 0$) имамо да важе следеће једнакости:

$$P(S_{n+1} = j \mid S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_1 = i_1)$$

$$= \frac{P(S_{n+1}=j, S_n=i_n, S_{n-1}=i_{n-1}, ..., S_1=i_1)}{P(S_n=i_n, S_{n-1}=i_{n-1}, ..., S_1=i_1)}$$

$$= \frac{P(S_{n+1}-S_n=j-i_n, S_n-S_{n-1}=i_n-i_{n-1}, ..., S_2-S_1=i_2-i_1, S_1=i_1)}{P(S_n-S_{n-1}=i_n-i_{n-1}, ..., S_2-S_1=i_2-i_1, S_1=i_1)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=j-i_n, X_n=i_n-i_{n-1}, ..., X_2=i_2-i_1, X_1=i_1)}{P(X_n=i_n-i_{n-1}, ..., X_2=i_2-i_1, X_1=i_1)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=j-i_n)P(X_n=i_n-i_{n-1}, ..., X_2=i_2-i_1, X_1=i_1)}{P(X_n=i_n-i_{n-1}, ..., X_2=i_2-i_1, X_1=i_1)}$$

$$= P(X_{n+1} = j - i_n)$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=j-i_n)P(X_n+...+X_1=i_n)}{P(X_n+...+X_1=i_n)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=j-i_n, X_n+...+X_1=i_n)}{P(X_n+...+X_1=i_n)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=j-i_n, S_n=i_n)}{P(S_n=i_n)}$$

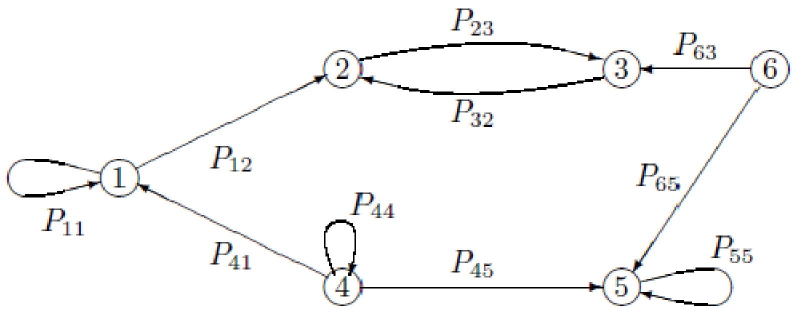
$$= \frac{P(S_{n+1}=j, S_n=i_n)}{P(S_n=i_n)}$$

$$= P(S_{n+1} = j \mid S_n = i_n),$$

одакле добијамо да за Случајан ход важи Марковљево својство.

3.2 Класификација стања Марковљевог ланца

Марковљеви ланци се често представљају усмереним тежинским графовима (видети слику 1 испод). За сваки чвор у графу постоји одговарајуће стање које одговара том чвору. Усмерене гране повезују два чвора i и j уколико је $P_{ij} > 0$ и на свакој од тих грана се налази вероватноћа P_{ij}. Ако је $P_{ij} = 0$ онда не постоји грана између та два чвора.



Слика 1

Дефиниција 3.2.1: Пут (од n корака) је уређени низ чворова $(i_0, i_1, ...i_n), n \geq 1$, где за $\forall m$ $1 \leq m \leq n$ постоји усмерена грана од i_{m-1} до i_m.

Дефиниција 3.2.2: Путања је пут где се ниједан чвор не понавља.

Дефиниција 3.2.3: Циклус је пут где се само први и последњи чвор поклапају и где не долази до понављања ниједног другог чвора.

Дефиниција 3.2.4: Кажемо да се стање j **може достићи** из стања i, у ознаци $i \to j$, ако постоји пут у графу усмерен од чвора i до чвора j.

На пример, на слици 1, видимо да постоји пут од чвора 1 до чвора 3, те стога имамо да се чвор 3 може достићи од чвора 1. Са друге стране до чвора 3 се не може достићи од чвора 5, јер не постоји усмерен пут од 5 до 3.

Са гледишта вероватноће, достизање стања i_n из стања i_0 можемо објаснити на следећи начин. Претпоставимо да постоји пут $i_0, i_1, ..., i_n$ од чвора i_0 до i_n. Тада, под условом да је $X_0 = 0$, постоји позитивна вероватноћа да је $X_1 = i_1$ (јер је $P_{i_0 i_1} > 0$). Слично тако важи и да постоји позитивна вероватноћа да је $X_2 = i_2$. Настављајући овај поступак добија се да постоји позитивна вероватноћа да је $X_n = i_n$, одакле следи да је $P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0) > 0$.
Обратно, ако је дато да је $P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0) > 0$, онда мора да постоји пут од i_0 до i_n.
Надаље ћемо вероватноћу $P(X_n = j \mid X_0 = i)$ обележавати као P_{ij}^n. Дакле, сада имамо да је за $n \geq 1$ $P_{ij}^n > 0$ ако и само ако у графу постоји пут од n корака од i_0 до i_n.

Лема 3.2.1: Релација достизања стања је транзитивна.
Заиста, ако постоји пут од n корака од стања i до стања j, и ако постоји пут од m корака од стања j до стања k, онда постоји пут од $n + m$ корака од стања i до стања k. Односно:

$$P_{ij}^n > 0, \; P_{jk}^m > 0 \; \Rightarrow P_{ik}^{n+m} > 0\,.$$

Одавде исто видимо да важи следеће:

$$i \to j, \; j \to k \; \Rightarrow i \to k$$

Дефиниција 3.2.5: Два различита стања i и j **комуницирају**, у ознаци $i \leftrightarrow j$, ако се стање i може достићи од стања j и ако се стање j може достићи од стања

i.

Лема 3.2.2: Релација комуницирања је транзитивна, тј. ако важи да је $i \leftrightarrow j$ и $m \leftrightarrow j$, онда важи и да је $i \leftrightarrow m$.

Доказ: Из услова да $i \leftrightarrow j$ и $m \leftrightarrow j$ имамо да $i \to j$ и $j \to m$, одакле следи (на основу Леме 3.2.1.) да $i \to m$.
Слично и за другу страну, на основу услова имамо да важи $m \to j$ и $j \to i$, одакле $m \to i$.
Дакле, из $i \to m$ и $m \to i$ следи $i \leftrightarrow m$, што је и требало доказати.

Лема 3.2.3: Релација комуницирања је релација еквиваленције.

Доказ:
1) Рефлексивност: За свако стање i имамо да $i \leftrightarrow i$.

2) Симетрија: Имамо да је за свака два стања i и j релација $i \leftrightarrow j$ еквивалентна са релацијом $j \leftrightarrow i$.

3) Транзитивност: На основу Леме 3.2.2 имамо да је релација комуницирања транзитивна.

Пошто је релација комуницирања и рефлексивна и симетрична и транзитивна следи да је она и релација еквиваленције.

На основу Леме 3.2.3 можемо да закључимо да се скуп свих стања може поделити у дисјунктне подскупове $A_1, A_2, A_3, ...$, где сваки од подскупова A_i представља **класу комуницирања** за себе.

Дефиниција 3.2.6: Нерастављив Марковљев ланац је Марковљев ланац чији је скуп стања сачињен од јединствене класе комуницирања.

Дефиниција 3.2.7: Класа стања C је непразан скуп стања таквих да свако стање $i \in C$ комуницира са сваким другим стањем $j \in C$ и да не комуницира ни са једним другим стањем j за које важи да $j \notin C$.

У графу на слици 1, $\{2, 3\}$ чини једну класу стања, док $\{1\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ такође чине засебне класе стања.

Дефиниција 3.2.8: Рекурентно стање је стање i које се може достићи из свих стања из којих се може достићи из i. Односно, стање i је рекурентно ако релација $i \to j$ имплицира релацију $j \to i$.

Дефиниција 3.2.9: Прелазно стање је стање које није рекурентно.

Теорема 3.2.1: У једној класи стања су сва стања или рекурентна или прелазна.

Доказ: Претпоставимо да је стање i прелазно (тј. да постоји неко стање j за које важи да је $i \to j$ али не и $j \to i$) и претпоставимо да су i и m у истој класи

стања ($i \leftrightarrow m$). Тада важи да $m \to i$ и да $i \to j$, одакле следи да $m \to j$. Ако $j \to m$, онда пут од j до m може да се продужи и до i, што је контрадикција. Следи да нема пута од j до m и да m представља прелазно стање.
Овиме смо показали да ако је у некој класи стања један чвор у прелазном стању, да су онда сви чворови те класе у прелазном стању. Стога су сви чворови неке класе или у прелазном или у рекурентном стању.

Нека је $\mu_i(i)$ очекивано време повратка у стање i, односно $\mu_i(i) = E[T_i \mid X_0 = i]$.

Дефиниција 3.2.10: Позитивно рекурентно стање i је рекурентно стање за које важи да је:

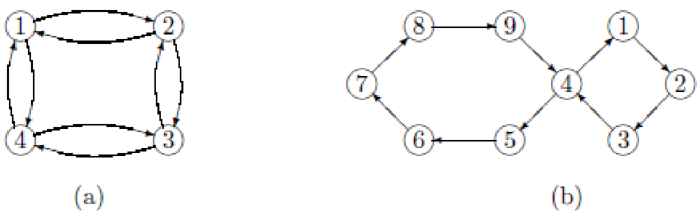
$$\mu_i(i) = E[T_i \mid X_0 = i] < \infty.$$

Дефиниција 3.2.11: Нулто рекурентно стање i је рекурентно стање за које важи да је:

$$\mu_i(i) = E[T_i \mid X_0 = i] = +\infty.$$

Стања се могу класификовати и по периодичности.

Дефиниција 3.2.12: Период стања i $d(i)$ је највећи заједнички делилац свих вредности n за које је $P_{ii}^n > 0$. Ако је период 1 онда је стање **апериодично**, а ако је 2 или више онда је стање **периодично**.



Слика 2

На пример, на слици 2а) је $P_{11}^n > 0$ за $n = 2, 4, 6, ...$, те је стога период стања 1 једнак $d(1) = 2$. На слици 2б) се слично добије да је $P_{11}^n > 0$ за $n = 4, 8, 10, 12, ...$, па је $d(1) = 2$.

Теорема 3.2.2: У једној класи сва стања имају исти период.

Доказ: Нека су i и j различита стања класе C. Тада имамо да $i \leftrightarrow j$ и да за неко r и за неко s важи да је $P_{ij}^r > 0$ и $P_{ji}^s > 0$. Сада знамо да постоји пут дужине $r + s$ од i до j и назад до i, те из дефиниције периода стања добијамо да $r + s$ мора бити дељиво са $d(i)$.
Нека је t неки цео број за који важи да је $P_{jj}^t > 0$. Пошто постоји пут дужине $r + t + s$ од i до j и назад до i, следи да је $r + t + s$ дељиво са $d(i)$, те је онда и t дељив са $d(i)$. Ово важи за свако t за које је $P_{jj}^t > 0$, па добијамо да је $d(j)$ дељиво са $d(i)$.
Сада када се замене улоге i и j добија се да је $d(i)$ дељиво са $d(j)$.
Дакле, имамо да је $d(i) = d(j)$, што је и требало доказати.

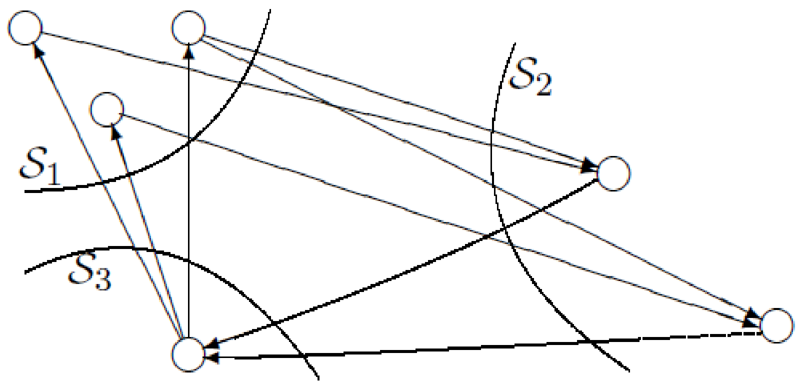
Теорема 3.2.3: Ако рекурентна класа C (класа где су сва стања рекурентна) у

Марковљевом ланцу има период d, онда се скуп стања класе C може поделити у d подскупова, $S_1, S_2, ..., S_d$, тако да сви преласци из S_1 иду у S_2, сви преласци из S_2 иду у S_3, ..., сви преласци из S_{d-1} иду у S_d. И на крају, сви преласци из S_d иду у S_1.

Доказ: За дато стање i из класе C, подскупове $S_1, S_2, ..., S_d$ дефинишемо на следећи начин:

$$S_m = \{j : P_{ij}^{nd+m} > 0 \text{ за неко } n \geq 0\}, \quad 1 \leq m \leq d.$$

На слици 4 је приказана подела за случај када је $d = 3$:



Слика 3

За свако $j \in C$ ћемо прво доказати да постоји само јединствена вредност m за које $j \in S_m$. Пошто $i \leftrightarrow j$, следи да је за неко r и за неко s $P_{ij}^r > 0$ и $P_{ji}^s > 0$. Сада имамо да постоји пут од i до i (преко j) дужине $r + s$, те је стога $r + s$ дељиво са d.
За дато r нека m задовољава једнакост $r = m + nd$ $(1 \leq m \leq d)$, где је n цео број. Нека је r_1 цео број различит од r за који важи да је $P_{ij}^{r_1} > 0$. Добијамо да је $r_1 + s$ дељиво са d, и самим тим да је и $r_1 - r$ дељиво са d. Дакле, имамо да је $r_1 = m + n_1 d$ за неки цео број n_1 и исто m.
Пошто је r_1 произвољан цео број за који је $P_{ij}^{r_1} > 0$, j припада S_m за тачно једну вредност броја m. Овиме смо добили да су подскупови S_m дисјунктни и да деле скуп стања класе C на дисјунктне подскупове.

Ако $j \in S_m$ и $P_{jk} > 0$ и ако је задата путања дужине $r = m + nd$ од i до j, тада постоји путања дужине $nd + m + 1$ од стања i до стања k. За случај када је $m < d$ имамо да $k \in S_{m+1}$, а за случај $m = d$ важи да $k \in S_1$, чиме смо завршили доказ ове теореме.

До сада смо видели да се класе стања могу класификовати по својим периодима и по томе да ли су рекурентна или прелазна. Најважнији подслучај је када је класа стања апериодична и рекурентна.

Дефиниција 3.2.13: Ергодична класа стања коначног Марковљевог ланца је класа стања која је и рекурентна и апериодична.

Дефиниција 3.2.14: Ергодични ланац је Марковљев ланац сачињен од само једне ергодичне класе.

3.3 Матрична репрезентација Марковљевих ланаца

3.3.1 Матрица преласка

До сада смо се упознали са графовском репрезентацијом Марковљевих ланаца. Међутим, испоставља се да је матрични облик најпогоднији за њихов приказ.

Наиме, наш матрични приказ Марковљевог ланца би требао да се конструише на следећи начин:

1) Редови матрице представљају садашње стање, тј. случајне величине X_t
2) Колоне матрице представљају будуће стање, тј. случајне величине X_{t+1}
3) Поље (i, j) представља вероватноћу преласка из стања i у стање j, односно:

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i).$$

Приметимо да у матрици преласка важи следеће:

1) Матрица преласка P мора да садржи сва могућа стања Марковљевог ланца.
2) P је облика $N \times N$, јер X_t и X_{t+1} узимају неку вредност из простора стања S (величине N).
3) Збир вредности у сваком реду у P мора бити једнак 1, што значи случајна величина X_{t+1} мора узети неку од понуђених вредности:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \sum_{j=1}^{N} P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \sum_{j=1}^{N} P_{\{X_t=i\}}(X_{t+1} = j) = 1.$$

4) Збир вредности у свакој колони у P не мора бити једнак 1.

Дефиниција 3.3.1: Нека је $\{X_0, X_1, ...\}$ Марковљев ланац са простором стања S величине N (овде је могуће да $N \to \infty$). **Вероватноћа преласка** представља следећи израз:

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i), \quad \forall i, j \in S, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

Дефиниција 3.3.2: Матрица преласка Марковљевог ланца је заправо матрица $P = (p_{ij})$.

3.3.2 Вероватноћа преласка вишег реда

У претходном одељку смо увидели да су матрице преласка изузетно корисне када је у питању складиштење вероватноћа $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, $i, j \in S$ у низ података. Међутим, ми из матрица преласка можемо да нађемо и вероватноће $k-$тог реда преласка.

Теорема 3.3.1: Једначина Чапман-Колмогоров (*Chapman-Kolmogorov*) гласи:

$$P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{l \in S} P(X_m = j \mid X_0 = l) P(X_n = l \mid X_0 = i)$$

Доказ: Ради олакшавања доказа увешћемо следећу веома корисну лему:

Лема 4.3.1: Важи следећа једнакост:

$$[P(X_{n+k} = j \mid X_n = i)]_{i,j\in S} = [[P^k]_{i,j}]_{i,j\in S} = P^k$$

Доказ: Индукцијом по k ћемо доказати дату једнакост.
За индуктивну базу ћемо прво да израчунамо вероватноћу преласка 2. реда:

$$P(X_{n+2} = j \mid X_n = i) = \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = l \mid X_n = i)$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} \frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=l, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} \frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=l, X_n=i)}{P(X_{n+1}=l, X_n=i)} \frac{P(X_{n+1}=l, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = l, X_n = i) P(X_{n+1} = l \mid X_n = i)$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = l) P(X_{n+1} = l \mid X_n = i)$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} P_{i,l} P_{l,j}$$

$$= [P^2]_{i,j}, \;\; i, j \in S$$

Претпоставимо сада да лема важи за општи случај тј. за вероватноћу преласка $k-$тог реда. Сада хоћемо да докажемо да важи и за вероватноћу преласка $k + 1-$ог реда:

$$P(X_{n+k+1} = j \mid X_n = i) = \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+k+1} = j, X_{n+k} = l \mid X_n = i)$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} \frac{P(X_{n+k+1}=j, X_{n+k}=l, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} \frac{P(X_{n+k+1}=j, X_{n+k}=l, X_n=i)}{P(X_{n+k}=l, X_n=i)} \frac{P(X_{n+k}=l, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+k+1} = j \mid X_{n+k} = l, X_n = i) P(X_{n+k} = l \mid X_n = i)$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+k+1} = j \mid X_{n+k} = l) P(X_{n+k} = l \mid X_n = i)$$

$$= \textstyle\sum_{l\in S} P(X_{n+k} = l \mid X_n = i) P_{l,j} \; ,$$

На основу индуктивне претпоставке долазимо до тога да је:

$$[P^{k+1}]_{i,j} = \textstyle\sum_{l\in S} [P^k]_{i,l} P_{l,j} \; ,$$

односно да важи дата једнакост у леми.

Сада можемо да се вратимо на почетну једнакост коју желимо да докажемо. Знамо да важи следећа релација:

$$P^{m+n} = P^m P^n \quad ,$$

која се може другачије интерпретирати и у облику:

$$[P^{m+n}]_{i,j} = \sum_{l \in S} [P^m]_{i,l} [P^n]_{l,j} \quad , i,j \in S \ ,$$

што је заправо еквивалентан облик задатом у поставци проблема, чиме је теорема доказана.

Пример: Аца, Пера, Никола и Лаза добацују лопту један другом произвољно бирајући саиграча којем ће бацити лопту када је добију. На почетку игре, лопта је код Лазе. Која је вероватноћа да лопта након 7 размењених додавања заврши код Лазе?

Решење: Доделимо Аци, Пери, Николи и Лази редом бројеве $1, 2, 3$ и 0, а нека X_k означава број особе код које се налази лопта у тренутку k.
На основу услова задатка имамо да је $X_0 = 0$ и тражи се да израчунамо вероватноћу $P(X_7 = 0 \mid X_0 = 0)$.
Вероватноћа да неки играч када добије лопту добаци неком одређеном саиграчу је једнака $p = \frac{1}{3}$. Почетна матрица P је дата на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} 0 & p & p & p \\ p & 0 & p & p \\ p & p & 0 & p \\ p & p & p & 0 \end{bmatrix}$$

Потребно нам је да израчунамо P^7 да бисмо дошли до коначног решења, а оно ће се налазити у пољу $(0, 0)$ новодобијене матрице (јер је $X_0 = 0$ и $X_7 = 0$):

$$\begin{bmatrix} 546p^7 & 547p^7 & 547p^7 & 547p^7 \\ 547p^7 & 546p^7 & 547p^7 & 547p^7 \\ 547p^7 & 547p^7 & 546p^7 & 547p^7 \\ 547p^7 & 547p^7 & 547p^7 & 546p^7 \end{bmatrix}$$

Следи да је коначна вероватноћа једнака $546p^7 = \frac{182}{729}$.

3.3.3 Стационарна расподела

Дефиниција 3.3.3: Стационарна расподела (или вектор стационарног стања) Марковљевог ланца од n стања са матрицом преласка P представља вектор $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ који задовољава следеће услове:

$$\pi = \pi P \ ; \qquad \text{где је } \sum_i \pi_i = 1, \ \pi_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq n.$$

Из дефиниције имамо да је:

$$\sum_i \pi_i P_{i,j} = \pi_j$$

Следећу теорему ћемо навести без доказа.

Теорема 3.3.2: Ако нерастављив и коначан Марковљев ланац има стационарну расподелу, тада је она јединствена.

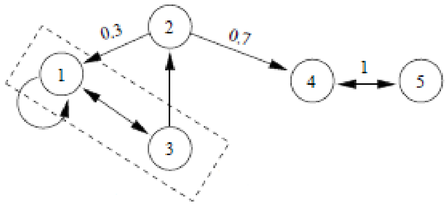
3.4 Вероватноћа поготка

Дефиниција 3.4.1: Вероватноћа поготка представља вероватноћу да ће Марковљев ланац некада достићи неко унапред одређено стање или неки скуп стања.

Вероватноће поготка се могу представљати и преко вектора.
Дефиниција 3.4.2: Нека је A подскуп скупа стања S. **Вероватноћа поготка** од стања i до скупа A је вероватноћа доласка до скупа A, полазећи од почетног стања i. Ову вероватноћу обележавамо као h_{iA}. Дакле, имамо да је:

$$h_{iA} = P(X_t \in A \text{ за неко } t \geq 0 \mid X_0 = i).$$

Пример: Нека је $A = \{1, 3\}$ као што је приказано на слици 3.



Слика 4

Имамо да је вероватноћа поготка за скуп A:

1) 1 ако се полази из стања 1 или 3
2) 0 ако се полази из стања 4 или 5
3) 0.3 ако се полази из стања 2

Ове вероватноће можемо другачије записати на следећи начин:

$$\boldsymbol{h_A} = \begin{pmatrix} h_{1A} \\ h_{2A} \\ h_{3A} \\ h_{4A} \\ h_{5A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.4.1. Формула за вероватноћу поготка: Вектор вероватноће поготка $h_A = (h_{iA} : i \in S)$ је минимално ненегативно решење следећих једначина:

$$h_{iA} = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ \sum_{j \in S} p_{ij} h_{jA} & i \notin A. \end{cases}$$

Под минималним ненегативним решењем подразумевамо следеће:
1. вредности $\{h_{iA}\}$ морају колективно да задовољавају горе наведене једначине
2. свака вредност h_{iA} мора бити ненегативна
3. нека је g_{iA} било које ненегативно решење система једначина, онда је $h_{iA} \leq g_{iA}$ за $\forall i$.

Доказ: Треба да покажемо следеће две ствари:
1) вероватноће поготка $\{h_{iA}\}$ колективно задовољавају горе наведене једначине
2) ако је $\{g_{iA}\}$ било које ненегативно решење система једначина различито од $\{h_{iA}\}$, онда важи да је $h_{iA} \leq g_{iA}$ за $\forall i$.

Доказ 1): Очигледно је $h_{iA} = 1$ ако $i \in A$ (јер онда ланац одмах стиже до A). Претпоставимо да $i \notin A$. Онда имамо да је:

$$h_{iA} = P(X_t \in A \text{ за неко } t \geq 1 \mid X_0 = i)$$

$$= \textstyle\sum_{j \in S} P(X_t \in A \text{ за неко } t \geq 1 \mid X_1 = j) P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

$$= \textstyle\sum_{j \in S} h_{jA}\, p_{ij},$$

Одакле следи да вероватноће поготка $\{h_{iA}\}$ колективно задовољавају горе наведене једначине.

Доказ 2): Нека је $h_{jA}^{(t)} = P(\text{долазак у } A \text{ у тренутку } t \text{ или пре})$. Математичком индукцијом ћемо показати да је $h_{jA}^{(t)} \leq g_{iA}$ за $\forall t$, те би онда стога важило да је $h_{iA} = \lim_{t\to\infty} h_{iA}^{(t)} \leq g_{iA}$.

За тренутак $t = 0$ важи следеће:

$$h_{iA}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A. \end{cases}$$

Међутим, пошто је g_{iA} ненегативно решење које задовољава почетни систем једначина имамо да је:

$$\begin{cases} g_{iA} = 1 & i \in A, \\ g_{iA} \geq 0 & \end{cases}$$

При чему је $g_{iA} \geq 0$ за $\forall i$. Дакле, следи да је $g_{iA} \geq h_{iA}^{(0)}$ за $\forall i$.

Претпоставимо да тврђење важи за тренутак t, односно да је $h_{jA}^{(t)} \leq g_{jA}$ за $\forall j$. Затим:

$$h_{iA}^{(t+1)} = P(\text{долазак у } A \text{ у тренутку } t+1 \text{ или пре} \mid X_0 = i)$$

$$= \textstyle\sum_{j \in S} P(\text{долазак у } A \text{ у тренутку } t+1 \text{ или пре} \mid X_1 = j) P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

$$= \textstyle\sum_{j \in S} h_{jA}^{(t)} p_{ij}$$

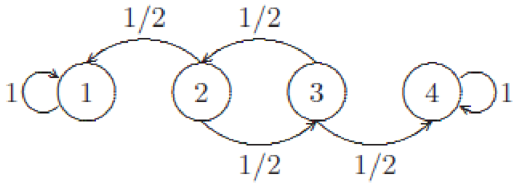
$$\leq \textstyle\sum_{j \in S} g_{jA} p_{ij}$$

$$= g_{iA},$$

где смо за последња 2 реда користили редом индуктивну претпоставку и чињеницу да $\{g_{iA}\}$ задовољава почетни систем једначина.
Сада долазимо до тога да је $h_{iA} = \lim_{t\to\infty} h_{iA}^{(t)} \leq g_{iA}$, чиме смо завршили доказ

теореме.

Пример: Наћи вектор вероватноће поготка за стање 4 (слика 5).



Слика 5

Решење: Једначине Теореме 3.4.1. нам дају следеће:

$$h_{i4} = \begin{cases} 1 & i = 4, \\ \sum_{j \in S} p_{ij} h_{j4} & i \neq 4. \end{cases}$$

Сада имамо да је:

$$\begin{aligned} &h_{44} = 1 \\ &h_{14} = h_{14} \\ &h_{24} = \tfrac{1}{2}h_{14} + \tfrac{1}{2}h_{34} \\ &h_{34} = \tfrac{1}{2}h_{24} + \tfrac{1}{2}h_{44} = \tfrac{1}{2}h_{24} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Приметимо да h_{14} може узети било коју вредност, али због услова минималног ненегативног решења добијамо да је заправо $h_{14} = 0$ ($h_{44} = 1 \geq 0$, $h_{24} \geq 0$, $h_{34} \geq 0$). Када убацимо $h_{14} = 0$ у једначине добијамо:

$$\begin{aligned} &h_{24} = \tfrac{1}{2}h_{34} + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \\ &h_{34} = \tfrac{1}{2}h_{24} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{34} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}h_{34}) + \tfrac{1}{2} \Rightarrow h_{34} = \tfrac{2}{3} \Rightarrow h_{24} = \tfrac{1}{3}.$$

Вектор вероватноће поготка за стање 4 је:

$$\boldsymbol{h_A} = \left(0,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ 1\right).$$

3.4.1 Математичко очекивање времена поготка

Дефинција 3.4.1.1: Нека је A подскуп скупа стања S. **Време поготка** скупа A представља случајна величина T_A дефинисана као:

$$T_A = \min\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

T_A је време потребно за први долазак у A и може узимати вредности $0, 1, 2, ..., \infty$. Ако ланац никад не долази до A онда је $T_A = \infty$.

Дефинција 3.4.1.2: **Средње време поготка** скупа A, почевши из стања i, је:

$$m_{iA} = E(T_A \mid X_0 = i).$$

Ако постоји икаква вероватноћа да ланац никада неће стићи до скупа A, тада је $E(T_A \mid X_0 = i) = \infty$.

Теорема 3.4.1.1. Формула за израчунавање средњег времена поготка: Вектор математичког очекивања времена поготка $m_A = (m_{iA} : i \in S)$ је минимално ненегативно решење следећих једначина:

$$m_{iA} = \begin{cases} 0 & i \in A, \\ 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} m_{jA} & i \notin A. \end{cases}$$

Доказ: Треба показати следеће две ствари:
1) средња времена поготка $\{m_{iA}\}$ колективно задовољавају горе наведене једначине
2) ако је $\{u_{iA}\}$ било које ненегативно решење система једначина различито од $\{m_{iA}\}$, онда важи да је $m_{iA} \leq u_{iA}$ за $\forall i$.

У овом делу ћемо доказати само део под 1).
Доказ 1): Очигледно је $m_{iA} = 0$ ако $i \in A$ (јер онда ланац одмах стиже до A). Претпоставимо да $i \notin A$. Онда имамо да је:

$$m_{iA} = E(T_A \mid X_0 = i)$$

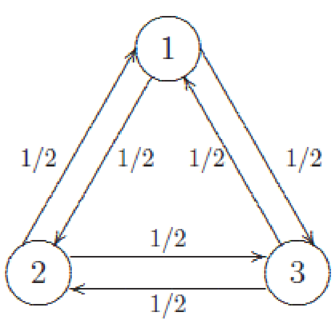
$$= 1 + \textstyle\sum_{j \in S} E(T_A \mid X_1 = j) P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$
(прво треба учинити 1 корак ка j а онда одатле треба наћи $E(T_A)$)

$$= 1 + \textstyle\sum_{j \in S} m_{jA} p_{ij}$$

$$= 1 + \textstyle\sum_{j \notin A} p_{ij} m_{jA}$$
(јер је $m_{jA} = 0$ за $j \in A$).

Одакле следи да средња времена поготка $\{m_{iA}\}$ колективно задовољавају горе наведене једначине.

Пример: Скакавац скаче око троугла тако што при сваком скоку он прелази на неки од преостала два темена. Које је очекивано време да скакавац стигне од чвора 1 до чвора 2?



Решење: Матрица преласка је дата на следећи начин:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Сада имамо да је:

$$m_{i2} = \begin{cases} 0 & i = 2, \\ 1 + \sum_{j \neq 2} p_{ij} m_{j2} & i \neq 2. \end{cases}$$

Треба наћи вредност m_{12} :

$$m_{22} = 0$$

$$m_{12} = 1 + \tfrac{1}{2} m_{22} + \tfrac{1}{2} m_{32} = 1 + \tfrac{1}{2} m_{32}$$

$$m_{32} = 1 + \tfrac{1}{2} m_{22} + \tfrac{1}{2} m_{12} = 1 + \tfrac{1}{2} m_{12} = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} m_{32})$$

$$\Rightarrow m_{32} = 2.$$

Следи да је $m_{12} = 1 + \frac{1}{2} m_{32} = 2$.

4

Примена Марковљевих ланаца

Примена Марковљевих ланаца је, као што је речено у самом уводу, заиста енормна. Они су од изузетне користи за моделовање стохастичких процеса у дискретном времену и простору.

Подручја примене леже у физици, програмирању, вештачкој интелигенцији, машинском учењу, биоинформатици, екологији, метеорологији, економији, финансијама итд. Заправо скоро да ни нема науке или научне области, а да Марковљеви ланци не могу некако да се имплементирају. Стога ћемо овде издвојити само неке од многобројних примена:

1) Марковљеви ланци у теорији информације
2) Примена скривеног Марковљевог модела
3) Предвиђање стања на тржишту
4) Google Page Rank алгоритам

4.1 Марковљеви ланци у теорији информације

Када је Клод Шенон (*Claude E. Shannon*) објавио књигу „Математичка теорија комуникација“ (*"A Mathematical Theory of Communication"*) 1948. године, његов циљ је био да се уведе општи оквир за комуникацију заснован на принципима нових дигиталних медија.
Шенонова теорија информација даје математички формулисане одговоре на следећа питања:
1) Како би аналогни сигнали могли да се трансформишу у дигиталне?
2) Како би се дигитални сигнали тада могли кодирати на такав начин да бука и сметње не би нашкодиле оригиналној поруци коју представљају такви сигнали?
3) Како би оптимално коришћење датог пропусног опсега комуникационог канала могло бити осигурано?

Чувена формула ***ентропије*** коју повезујемо данас са Шеноновом теоријом информација дата је на следећи начин:

$$H = -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + ... + p_n \log_2 p_n),$$

где H представља количину информација, а p_i вероватноћу појављивања одређених стања.

Ова формула даје вредности у распону од нуле (када се сигурно догоди један од догађаја са вероватноћом 1, а сви други се не догоде) до максималне вредности $\log_2 N$ (када су сви догађаји подједнако вероватни (тј. јављају се са вероватноћом $\frac{1}{N}$)).

Очигледно је да ако се нешто претходно зна о поруци да би пријемник у комуникационом систему требао некако да искористи те чињенице. Шенон је сугерисао да је било који извор који преноси податке заправо Марковљев процес.
Ова претпоставка је довела до идеје да се унапред одреде вероватноће преласка комуникационих симбола, тј. вероватноће да неки одређен симбол следи други симбол или групу симбола. Ако се, на пример, извор информација састоји од речи „мама“ и искључује скраћенице, онда је вероватноћа преласка да се слово „а“ појави после слова „м“ једнака 1.
Шенон је Марковљев модел употребио слично као Марков у својој анализи Пушкиновог дела.

4.2 Примена скривеног Марковљевог модела

Скривени Марковљев модел (СММ) је статистички модел који се може користити за описивање промена уочљивих догађаја који зависе од унутрашњих фактора, а који нису директно приметни. Посматрани догађај називамо „симболом“, а „стањем“ невидљиви фактор који стоји у основи посматрања. СММ се састоји од два стохастичка процеса, наиме, од невидљивог процеса скривених стања и видљивог процеса уочљивих симбола. Скривена стања чине Марковљев ланац, а расподела вероватноће посматраног симбола зависи од основног стања. Због тога се СММ назива и двоструко уграђен стохастички процес.

Моделирање запажања у ова два слоја, једном видљивом, а другом невидљивом, је веома корисно, јер се многи проблеми из стварног света баве класификацијом грубих запажања у бројне категорије или класе које су нам значајније. На пример, размотримо проблем препознавања говора, за који се СММ интензивно користи већ неколико деценија. У препознавању говора нас занима предвиђање изговорене речи из снимљеног говорног сигнала. У ту сврху препознавач говора покушава да пронађе редослед фонема (стања) који су довели до стварног изговореног звука (запажања). С обзиром на то да у стварном изговору могу постојати велике разлике, оригинални фонеми (и на крају изговорена реч) не могу се директно посматрати и морају се предвидети.

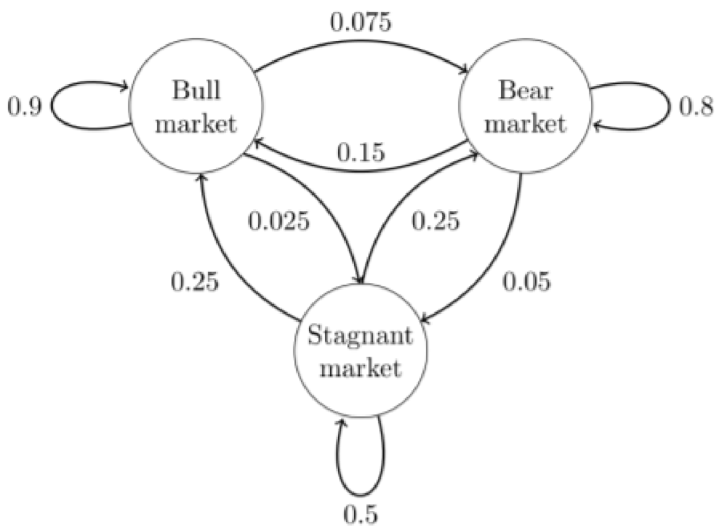
Овај приступ је такође користан у моделирању биолошких секвенци, као што су протеини и ДНК секвенце. Типично се биолошка секвенца састоји од мањих подструктура са различитим функцијама, а различити функционални региони често показују различита статистичка својства. На пример, добро је познато да се протеини углавном састоје од више домена. Када добијемо нови протеин занимљиво је предвидети градивне домене (који одговарају једном или више стања у СММ-у) и њихове локације у аминокиселинској секвенци (запажања). Даље, можемо да пронађемо и породицу протеина којој припада ова нова секвенца протеина.

У ствари, показало се да су СММ врло ефикасни у представљању биолошких секвенци, јер су успешно коришћени за моделирање говорних сигнала. Као резултат тога, СММ-ови постају све популарнији у рачунарској молекуларној биологији, и многи најсавременији алгоритми анализе секвенци су изграђени на њима.

4.3 Предвиђање стања на тржишту

Марковљеви ланци и њихове одговарајуће репрезентације (графовске или матричне) се могу користити за моделовање вероватноћа неких одређених финансијских ситуација на тржишту и на тај начин употребити за предвиђање будућих стања. Ова стања се могу наћи у једном од следећих тржишта:
1) Растуће тржиште: период када цене генерално расту
2) Опадајуће тржиште: период када цене генерално опадају
3) Стагнирајуће тржиште: период када цене нити расту нити опадају

Сада ћемо проучити пример који се налази на слици 6:



Bull market - Растуће тржиште
Bear market - Опадајуће тржиште
Stagnant market - Стагнирајуће тржиште
Слика 6

На поштеним тржиштима претпоставља се да су информације равноправно дистрибуиране између клијената и да се цене мењају насумично. То значи да сваки клијент има једнак приступ информацијама и да ниједан од њих нема предност због унутрашњих информација.

Сада узмимо у обзир хипотетичко тржиште са Марковљевим својством за које су нам подаци дати на слици 6. Приметимо да постоји 90% шансе да растуће тржиште настави да буде растуће, 7.5% шансе да постане опадајуће и 2.5% шансе да постане стагнирајуће итд. Све ове информације можемо да представимо на следећи начин:

To / From	Bull	Bear	Stagnant
Bull	0.9	0.075	0.025
Bear	0.15	0.8	0.05
Stagnant	0.25	0.25	0.5

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} = M$$

Нека је C вектор облика 1×3 који у себи садржи информацију у којем смо тренутно стању. Колона 1 представља стање растућег тржишта, колона 2 стање опадајућег, а колона 3 стање стагнирајућег тржишта. За почетно стање можемо без умањења општости да претпоставимо да се налазимо у стању опадајућег тржишта, тј. да матрица C има следећи облик:

$$C = [0 \quad 1 \quad 0].$$

Када имамо задато почетно стање, онда можемо да израчунамо вероватноћу да се нађемо у стању растућег, опадајућег или стагнирајућег тржишта након n корака. Све што треба да урадимо је да у $i-$том кораку помножимо вектор C са матрицом коју добијемо када степенујемо M на $i-$ти степен.
После 1. корака имаћемо следећу ситуацију:

$$C * M^1 = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^1 = [0.15 \quad 0.8 \quad 0.05]$$

после 5. корака имамо следећу:

$$C * M^5 = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^5 = [0.48 \quad 0.45 \quad 0.07]$$

а после 52. корака добијамо да је:

$$C * M^{52} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^{52} = [0.63 \quad 0.31 \quad 0.05]$$

док после 99. корака имамо да је:

$$C * M^{99} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^{99} = [0.63 \quad 0.31 \quad 0.05]$$

Из овога можемо да закључимо да ћемо се након $n-$тог корака (при чему $n \to \infty$) налазити у стању растућег тржишта са 63% шансе, у стању опадајућег са 31% шансе и у стању стагнирајућег тржишта са 5% шансе.

4.4 Google Page Rank алгоритам

Google Page Rank је алгоритам који Гугл претраживач (Google Search) користи за рангирање веб страница по количини њихове претраге. Page Rank алгоритам свакој страници додели оцену важности, што заправо представља рекурзивно дефинисану величину, јер се страница сматра такође битном ако до ње може да се дође и преко неке друге битне странице.

Један начин гледања на Google Page Rank јесте да га замислимо као неког рандом претраживача, који се креће по страницама које су међусобно повезане линковима. Тада је оцена неке одређене странице заправо вероватноћа да се тај рандом претраживач нађе баш на тој страници. Пошто постоје линкови који воде од битних веб страница ка другим, то онда значи да је вероватноћа да се нађемо у тим суседним страницама већа од осталих и самим тим и те суседне странице имају већу оцену важности.

Понашање рандом претраживача представља пример Марковљевог процеса, односно рандом процеса чија будућа стања система зависе само од тренутног, а не од претходног стања система.

Сада можемо да се фокусирамо на интерпретацију Google Page Rank алгоритма преко Марковљевих ланаца.
Претпоставимо да имамо укупно N веб страница. Нека је оцена важности странице i вероватноћа $PR(i)$. Оцене важности страница су детерминисане следећим линеарним једначинама:

$$PR(i) = (1-d) + \sum_{j\,:\,i \leftrightarrow j} PR(j)\frac{d}{C(j)}, \quad i = 1, 2, ..., N \ ,$$

где $C(j)$ представља укупан број линкова на страници j, а ознака $i \leftrightarrow j$ значи да су странице i и j повезане линком.

Модел мреже веб страница ћемо представити Марковљевим ланцем. На мрежу можемо да гледамо као на огромну машину стања, где свака страница представља једно посебно стање. На крају ћемо доћи до закључка да су оцене важности страница пропорционалне стационарним вероватноћама стања у Марковљевом ланцу, тј. колико год дуго ишли случајним корацима по веб страницама, испоставиће се да ће вероватноћа доласка на неку страницу конвергирати, и та вероватноћа не зависи од тога од које смо странице на почетку кренули. Што је већа вероватноћа то ће и оцена важности бити већа. Скалирајући фактор између оцене важности и вероватноће је $\frac{N}{d}$, где је $0 < d < 1$ унапред изабрана константа.

Дакле, Марковљев ланац ћемо конструисати на следећи начин:

1) Свака страница представља једно стање, $i = 1, ..., N$.

2) Додаје се имагинарно стање, за рестартовање странице, и означићемо га као стање 0

3) Нека је $p_{j,i}$ вероватноћа преласка из стања j у стање i. Имамо да важи $\sum_i p_{j,i=1}$ за свако j.

3а) Свако стање i $(0 \leq i \leq N)$ са вероватноћом $1-d$ прелази у стање 0, тј. за свако i је $p_{i,0} = 1-d$. Другим речима, без обзира на то на којој смо тренутно страници увек постоји фиксна вероватноћа да ћемо рестартовати страницу.

3б) Вероватноћа преласка из стања 0 у стање i, $i \neq 0$, је $p_{0,i} = \frac{d}{N}$.

3в) Вероватноћа преласка из стања j $(j \neq 0)$ у стање i $(i \neq 0)$ је:

$$p_{j,i} = \tfrac{d}{C(j)} \cdot I(j \leftrightarrow i),$$

где је I индикатор функције који је једнак 1 када је аргумент тачан и 0 када је аргумент нетачан. Ово значи да је остатак вероватноће d (поред вероватноће $1-d$ одласка у стање 0) равномерно распоређен ка $C(j)$ линкова. Ако страница j није повезана линком са страницом i онда је $p_{j,i} = 0$.

Нека је стационарна вероватноћа стања i π_i. Знамо да важи следеће (претпостављајући да је ланац нерастављив, ергодичан и да се може представити као повезан граф без појављивања циклуса):

$$\pi_i = \textstyle\sum_{j=0}^{N} \pi_j p_{j,i} \quad i = 0, 1, ..., N$$

$$\textstyle\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1.$$

Специјално за наш случај имамо да је:

$$\pi_0 = \textstyle\sum_{j=0}^{N} \pi_j p_{j,0} = \sum_{j=0}^{N} \pi_j (1-d) = (1-d) \sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1-d$$

$$\pi_i = \pi_0 p_{0,i} + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \pi_j p_{j,i} = (1-d) \cdot \frac{d}{N} + \sum_{j\,:\,i \leftrightarrow j} \pi_j \frac{d}{C(j)}.$$

Помножимо претходну једнакост са $\frac{N}{d}$:

$$\tfrac{N}{d} \cdot \pi_i = (1-d) + \textstyle\sum_{j\,:\,i \leftrightarrow j} (\frac{N}{d} \cdot \pi_j) \frac{d}{C(j)}.$$

Дефинишимо оцену важности $PR(i)$ као $PR(i) = \frac{N}{d}\pi_i$.Тада добијамо да је:

$$PR(i) = (1-d) + \textstyle\sum_{j\,:\,i \leftrightarrow j} PR(j) \frac{d}{C(j)}, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

што тачно представља једначину коју је старија верзија Гугла користила за оцену важности страница.

5

Закључак

На почетку овог рада смо детаљно проучили проблем Случајног хода, који представља један једноставан пример Марковљевог ланца. Циљ овог уводног дела је био да полако уведемо појам Марковљевог ланца у причу не би ли стекли осећај за оним што следи.

У другом делу смо прешли на саме дискретне Марковљеве ланце, дефинишући одмах на почетку Марковљево својство, а потом и класификацију стања. Затим смо видели да постоји матрична репрезентација Марковљевог ланца и у оквиру ње смо извели изузетно важну формулу, а то је једначина Чапман-Колмогоров. У овом поглављу смо увели и појам стационарне расподеле, која игра битну улогу у случајевима када се стања Марковљевог ланца промене велики број пута, као и вероватноћу поготка, односно вероватноћу да ће Марковљев ланац достићи неки унапред одређен скуп стања.

У трећем делу рада смо се фокусирали на саму примену Марковљевих ланаца, где смо специјално издвојили примену Марковљевих ланаца у теорији информације, примену скривених Марковљевих модела и предвиђање стања на тржишту у економији. Посебан акценат смо ставили на Google Page Rank алгоритам, који можда представља једну од најважнијих примена, где смо дали интерпретацију модела преко Марковљевих ланаца.

Хтела бих да искористим ову прилику да се захвалим свом ментору професору Миодрагу Радојевићу, који ме је мотивисао и подстакао својим предавањима и дискусијама на часовима вероватноће и статистике да покушам да проучим ову тему и да даље наставим да се бавим њом. Захваљујем се на изузетној посвећености и помоћи при савладавању градива.

Литература

[1] Nicolas Privault *Understanding Markov Chains - Examples and Applications*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Singapore, 2013

[2] https://www.stat.auckland.ac.nz/ fewster/325/notes/ch8.pdf

[3] https://ocw.mit.edu

[4] http://www.statslab.cam.ac.uk/ james/Markov/

[5] https://www.americanscientist.org/article/first-links-in-the-markov-chain

[6] http://www.math.chalmers.se.pdf

[7] https://disi.unitn.pdf

[8] https://www.ncbi.nlm.nih.gov

[9] https://web.mst.edu.pdf

[10] https://web.stanford.edu.pdf